物理的相互作用による非対称応力の出現について

池田, 恵

物理的相互作用による非対称応力の出現について

東理大・理工　池田　恵

（５月１８日受理）

1. はじめに

連続体力学の分野に於ては，１９６０年代には、Cosserat連続体力学とか，[1] 一般化連続体の力学[2]とかと称して，従来の対称応力場を非対称にする試みが行なわれてき、そのためにcouple－stress などの新しい量を導入してきた。それを説明するためのモデルとしては、もっぱら抽象的に，方向特性とか，内部構造とかを想定し，「点自身が構造をもつ」ことを実体化せんと努力してきたようである。具体的な実例としては，elastic dielectrics[3] などという電磁的物質の連続体力学が考察されてきている。

ところが、その様な物理的相互作用場に注目してみる時、場の構造上，表面に出てくる応力が非対称になるためには，当然、そこに変形場への物理的自由度の介入がなければならず、相互作用自体のよりミクロな洞察が必要となるのであるが、その辺の事情は、従来、各論的に便宜的に考えられてきているにすぎず、応力の非対称性を intrinsicな形でとり入れることは試みられていないようである。

そこで、我々が考えたいのは、その実例として考えられている物理的相互作用の構造を陽に表現していくことにより，どの様にして応力の非対称化が図られるのかを、場の構造に照らして示していくことである。

2. 物理的相互作用の規定

我々が主張したいことは，「応力の非対称化は物理的相互作用の介在による」ということである。そして、それは明らかに，よりミクロな洞察をしているこ

とを意味する。

話を簡単にするために、今、初期状態として，ある電媒質物体が何らかの変形場を構成しているものとし，そこへ外場としての電、磁場をかけるとする。そして，物理的相互作用は外場から変形場への効果として認識されるものとし，その逆効果は存在しているはずだが，ここでは簡単のために省略することにする。そうすると、従来の我々の考察[4]に従って，線素 dx^κ が

$$(dx)^\kappa = dx^\kappa + \lambda^\kappa_\sigma \, dF^\sigma \tag{2.1}$$

に変化し、例えば方向特性なるものは

$$dP^\sigma = \chi^{\sigma}_{\cdot\rho} \, dF^\rho \tag{2.2}$$

で与えられることになる。 但し，$\mathbf{F} = (F^\sigma)$ は外場であり，λ^κ_σ は相互作用係数，$\chi^{\sigma}_{\cdot\rho}$ は純物理係数で，例えば polarizability などを意味する。

(2.1)，(2.2) に対しては，非ホロノーム部分空間分解論[5]が使えて，(A) = (κ, σ)－空間からの分解操作が

$$\left.\begin{aligned} &(A^\kappa_B) = (\delta^\kappa_\lambda, \lambda^\kappa_\sigma), \quad (A^B_\lambda) = (A^\kappa_\lambda \equiv \delta^\kappa_\lambda - \lambda^\kappa_\sigma A^\sigma_\lambda, A^\sigma_\lambda), \\ &(B^\sigma_A) = (0, \chi^{\sigma}_{\cdot\rho}), \quad (B^B_\rho) = (0, B^\tau_\rho = \overset{-1}{\chi}{}^{\tau}_{\cdot\rho}) \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

で与えられることになる。ここで $A^\kappa_B A^B_\lambda = \delta^\kappa_\lambda$, $B^\sigma_B B^B_\rho = \delta^\sigma_\rho$ を用いた。又、あくまで物理場から変形場への相互作用のみに注目することにしているから，その逆は無視した結果，(2.3) になる。更に，以下では，より一層の簡単化のために $A^\kappa_\lambda = \delta^\kappa_\lambda$, 即ち $\lambda^\kappa_\sigma A^\sigma_\lambda = \delta^\kappa_\lambda$ と仮定する。

この様な考察の結果をふまえれば，(2.1) の線素に基づく変形場が我々の着目するところとなる。

3. 変形場の構造

まず、線素 $(dx)^\kappa$ に基づく計量テンソルを導入しよう。それは，一般に

$$g_{\lambda\kappa} = A^A_\lambda A^B_\kappa G_{AB} \tag{3.1}$$

で与えられる。但し，G_{AB} は（A）=（κ,σ）− 場の計量テンソルで，以下では簡単のため．初期状態では純変形場の成分 $G_{\lambda\kappa}$ と純物理場の成分 $G_{\sigma\rho}$ のみしか存在しないとし，$G_{\lambda\sigma} = G_{\rho\mu} = 0$ と仮定する。この時，(3.1) は

$$g_{\lambda\kappa} = G_{\lambda\kappa} + \lambda^{\sigma}_{\lambda}\lambda^{\rho}_{\kappa}G_{\sigma\rho} \tag{3.2}$$

となり，相互作用の効果を含む。上記の仮定の下では，変形場への相互作用が直和的に付加され，$\lambda^{\sigma}_{\lambda}$ がすべての相互作用を代表することになる。

一方，この場の接続係数は，一般の変換則より

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} = A^{\kappa}_{A}A^{C}_{\mu}A^{B}_{\lambda}\Xi^{A}_{CB} + A^{\kappa}_{A}X_{\mu}A^{A}_{\lambda} \tag{3.3}$$

で導入されるが，初期状態での Ξ^{A}_{CB} は，場の構造がユークリッド的であると仮定して，$\Xi^{A}_{CB} = 0$ とおくことにする。又，$X_{\mu} = A^{B}_{\mu}\partial_{B} = \partial_{\mu} + \lambda^{\sigma}_{\mu}\partial_{\sigma}$ である。よって，(3.3) は

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} = \lambda^{\kappa}_{\sigma}X_{\mu}\lambda^{\sigma}_{\lambda} \tag{3.4}$$

に帰着する。

ここで注意したいのは，$g_{\lambda\kappa}$ は全体として対称であり，$G_{\lambda\kappa}$ も（$\lambda^{\sigma}_{\lambda}\lambda_{\kappa\sigma}$）（但し，$\lambda_{\kappa\sigma} \equiv \lambda^{\rho}_{\kappa}G_{\rho\sigma}$）もそうであるが，$\lambda^{\sigma}_{\lambda}$ 自身は必らずしもそうではなく，むしろ一般的にいえば非対称である。それ故，後でのべる様に，応力の非対称化は，すべからく，$\lambda^{\sigma}_{\lambda}$ に依存していることがわかる。又，$\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}$ も μ と λ については一般に非対称であり，これに対応する応力（モーメント応力）も非対称になることがいえる。

ここでの議論には $\lambda^{\sigma}_{\lambda}$，$\lambda^{\kappa}_{\rho}$ の具体形は関係ないが，実際問題としては，piezoelectricity などにみられる如く，P^{σ}，F^{σ} への依存性が陽に仮定されて然るべきである。

尚，上述の成分以外にも，$g_{\lambda\sigma}$，$g_{\sigma\rho}$，$\Gamma^{\kappa}_{\mu\sigma}$，$\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}$，$\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}$，等が存在するが，これらは変形場そのものとは直接関係ないので，ここでは言及しないでおく。

4. 応力方程式

そこで，場の独立変数として$(g_{\lambda\kappa},\ \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda})$を採用し，それらに対応する応力成分を$(\sigma^{\kappa\lambda},\ \mu_{\dot{\kappa}}^{\ \lambda\mu})$とおくことにより，この場でのエネルギー変分原理を考えると，

$$\int_V \left[\sigma^{\kappa\lambda}\,\delta g_{\lambda\kappa} + \mu_{\dot{\kappa}}^{\ \lambda\mu}\,\delta\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} \right] dV = 0 \tag{4·1}$$

とおける。但し，Vは着目する領域，dVは$(dx)^{\mu}$による体積素である。

(3.2)，(3.4)を代入し，部分積分を行ってやると，$(\delta\lambda^{\sigma}_{\lambda})$に対する相互作用応力$(\Sigma^{\lambda}_{\sigma})$についての応力方程式として

$$\Sigma^{\lambda}_{\sigma} = \sigma^{\kappa\lambda}\,\lambda_{\kappa\sigma} - M_{\dot{\sigma}}^{\ \nu\mu}\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - X_{\mu}M_{\dot{\sigma}}^{\ \lambda\mu} \tag{4.2}$$

を得る。但し，$M_{\dot{\sigma}}^{\ \lambda\mu} \equiv \mu_{\dot{\kappa}}^{\ \lambda\mu}\,\lambda^{\kappa}_{\sigma}$，$\lambda_{\kappa\sigma} \equiv \lambda^{\rho}_{\kappa}\,G_{\rho\sigma}$。この応力$\Sigma^{\lambda}_{\sigma}$は一般に非対称であり，$\lambda^{\sigma}_{\lambda}$に抗するもの故，物理的相互作用の介在によって非対称応力が出現することがわかるが，一方，$\sigma^{\kappa\lambda}$は明らかに対称応力であり，(4.2)から，逆に，

$$\left.\begin{aligned} &\sigma^{\kappa\lambda} = \Sigma^{\lambda\kappa} + M^{\kappa\nu\mu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + M^{\nu\lambda\mu}\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} + X_{\mu}M^{\kappa\lambda\mu} \\ &\qquad \text{但し}\left(\begin{aligned} &\Sigma^{\lambda\kappa} \equiv \Sigma^{\lambda}_{\sigma}\,\lambda^{\sigma\kappa}, \\ &M^{\kappa\lambda\mu} \equiv M_{\dot{\sigma}}^{\ \lambda\mu}\,\lambda^{\sigma\kappa}, \\ &\lambda_{\kappa\sigma}\,\lambda^{\sigma\lambda} = \delta^{\lambda}_{\kappa}, \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

と求める時，右辺の各項が局所応力として非対称であっても，全体としては，$\lambda^{\sigma\lambda}$を介して対称応力$\sigma^{\kappa\lambda}$にまとめられることを示している。そして，反対称応力方程式，即ち，モーメント方程式は，(4.3)より

$$\Sigma^{[\lambda\kappa]} + (M^{\nu[\lambda|\mu|} - M^{[\lambda|\nu\mu|})\,\Gamma^{\kappa]}_{\mu\nu} + X_{\mu}M^{[\kappa\lambda]\mu} = 0 \tag{4.4}$$

と得られ，couple－stress $M^{[\kappa\lambda]\mu}$が出現するといえる。つまり，couple－stressは，接続係数．ひいては振率のorderの量であり，$\lambda^{\sigma}_{\kappa}$，$\lambda^{\kappa}_{\rho}$からい

えば“二次”の orderの量といえ，その意味で，方向特性とか、内部構造，内部回転とかの一段ミクロの段階の自由度に抗する量だということがわかる。従って，そういう自由度を取り入れるならば、必らずや，非対称応力が出現することも明らかとなる。

5. Finsler 空間論的考察

さて，以上の議論を通常のFinsler空間論[7)]による連続体力学から考えてみることも可能である。以上述べた形式は、いわゆる接触テンソル解析的なものであり．これに陽に接触変換を適用していけば，Finsler 空間論に通ずることは周知のとおりである。[5)] そこで，この節では表面に出てくる方向特性（p^i）に注目することにし，独立変数（x^i，p^j）の場を考えていくことになる。つまり，（p^i）の介在によって非対称応力が出現する機構をFinsler空間論的に考察したい。但し，この節では，通常の扱い方に従って，前節までの様な指標の区別はしないことにする。

まず，特徴的なのは、接続が

$$DV^i = dV^i + \Gamma^i_{kj}\, V^j\, dx^k + C^i_{kj}\, V^j\, dp^k \tag{5.1}$$

で与えられることである。つまり，（p^k）の挙動に対して，C^i_{kj} なる新しい接続係数が出現し，これが，今の我々の議論には本質的な役割を果すことがわかる（cf. 後述）。

一方，今，計量テンソルを $g_{ji}(x,p)$ とおくと，通常の計量条件より，

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} = 2\,\Gamma_{k(ji)}, \qquad \frac{\partial g_{ji}}{\partial p^k} = 2\,C_{k(ji)} \\ &\text{但し,}\quad \Gamma_{kji} \equiv \Gamma^{\ell}_{kj}\, g_{\ell i}, \quad C_{kji} \equiv C^{\ell}_{kj}\, g_{\ell i} \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

が成立たねばならぬ。ここで簡単のため、$C_{kji} = C_{jik} = C_{ikj} = C_{kij}$ と仮定する。これは g_{ji} が p^k について0次斉次なことを仮定することに他な

らず，$C_{kji}p^i = C_{jik}p^i = C_{ikj}p^i = 0$ が成立つと同時に，

$$C_{kji} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ji}}{\partial p^k} \qquad (5.3)$$

と一意的に決定されてくる。

さて，次に，p^k 自身の振舞に着目するわけだが，これについては幾何学的には基接続[8]の概念が対応してき，p^k についての固有法則を与えるが，今の場合，簡単に

$$Dp^i = dp^i + \Gamma_{kj}^{\ i} p^j dx^k = 0 \qquad (5.4)$$

とおくことにしたい。この時，$(-\Gamma_{kj}^{\ i}\ p^j)$ なる量が osculating factor として，p^k による“はみだし”を (x^k)–場の中に射影する操作を代表する。そして，この時，(5.1)は

$$DV^i = dV^i + \overset{*}{\Gamma}{}_{kj}^{\ i} V^j dx^k \ ;\ \overset{*}{\Gamma}{}_{kj}^{\ i} \equiv \Gamma_{kj}^{\ i} - C_{\ell j}^{\ i}\Gamma_{km}^{\ \ell} P^m \qquad (5.5)$$

に縮退する。

そこで，次には $\overset{*}{\Gamma}{}_{kj}^{\ i}$，ひいては $\Gamma_{kj}^{\ i}$ の決定という問題が残ってくるが，ここでは簡単のために微少変形を仮定し，全変形を $\alpha_{ji}(x,p)$ とおくと，$g_{ji} = \delta_{ji} - 2\alpha_{(ji)}$ で与えられるとする時，$\alpha_{[ji]}$ の自由度は Γ_{kji} の中に含まれてしまわなければならないので，$\Gamma_{kji} = -\partial_k \alpha_{ji}$ と仮定される。[9] そうすると，(5.4)から $C_{kji} = -\dfrac{\partial \alpha_{(ji)}}{\partial p^k}$ となり，(5.5)から

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\Gamma}{}_{kji} &= -(\partial_k \alpha_{ji}) - \left(\frac{\partial \alpha_{(ji)}}{\partial p^\ell}\right)(\partial_k \alpha_m^{\cdot\ell})\, p^m \\ &\text{但し，}\quad \alpha_m^{\cdot\ell} \equiv \alpha_{mn}\,\delta^{n\ell} \end{aligned}\right\} \qquad (5.6)$$

で与えられることになる。

よって，ここから前節の議論に移行することができる。(4.1) に対しては

今の場合,

$$\int_V \left[\sigma^{ij}\, \delta g_{ji} + \overset{*}{\mu}{}^{ijk}\, \delta \overset{*}{\Gamma}_{kji} \right] dv = 0 \tag{5.7}$$

が対応し,$(\delta g_{ji},\ \delta \overset{*}{\Gamma}_{kji})$ に上述の結果を代入してやれば,変形場の応力方程式として次を得ることができる。

$$\left.\begin{aligned} \delta\alpha_{(ji)}\ ;\ & -2\sigma^{ij} - \partial_k \overset{*}{\mu}{}^{(ij)k} + \frac{\partial}{\partial p^{\ell}} \left(\overset{*}{\mu}{}^{(ij)k}\, \Gamma^{\ell}_{km} P^m \right) \\ & \qquad - \partial_k \left(\overset{*}{\mu}{}^{mnk}\, C^{(i}_{\cdot \ell m}\, P^{j)} \right) = 0 \\ \delta\alpha_{[ji]}\ ;\ & \partial_k \overset{*}{\mu}{}^{[ij]k} - \partial_k \left(\overset{*}{\mu}{}^{mnk}\, C^{[i}_{\cdot nm}\, P^{j]} \right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

反対称応力方程式 $(5.8)_2$ においては $\overset{*}{\mu}{}^{[ij]k}$ が couple－stress の役割を果し,相互作用応力として,C_{kji} からの効果がきいてきている。(4.1),(5.7) では内部エネルギーに関する変分原理を扱ってい,これに外部仕事をつけ加えてやれば,body－couple とか surface－couple とかの存在が最初から仮定され,$(5.8)_2$ につりあうべき面モーメント,あるいは反対称応力成分の存在が自ずから仮定されねばならなくなる。よって,σ^{ij} は対称であっても,熱力学第一法則に見合うように方程式が構成されれば,$\overset{*}{\mu}{}^{ijk}$ の存在,つまりは $\overset{*}{\Gamma}_{kji}$ の効果の存在によって,$\delta\alpha_{[ji]}$ に拮抗するだけの反対称応力が出現せざるを得なくなるといえる。

6. おわりに

結局,ここでのべた事柄は,我々の以前からの物理的相互作用場の構築の論理に含みこまれ,それ自体としては,intrinsicに非対称計量空間による場の考察の中に含まれることがいえる。それ故,本質的には,非対称応力の出現が非対称計量の出現に匹敵し,そして,それは,とりもなおさず,物理的相互作用の出現そのものに他ならないことがいえ,従来,文献 1)～ 3)などで応力の非対称性を特別視して扱っていることが,今や,intrinsicな理由づけによ

って，必然的なものであることが主張されるに至った。その様な連続体力学における拡張は、具体的には従来通り，非局所化の要因に従って試みられるところである。[6)]

7. 参考文献

1）　例えば

J.L.Ericksen & C.Truesdell, Arch, Ratn'l Mech. Anal., 1 (1958), 295.

R.A.Toupin, Ibid., 17 (1964), 85.

R.D.Mindlin, Ibid., 16 (1963), 51.

2）　例えば

E.Kröner (ed.), Mechanics of Genelarized Continua. Springer, 1968.

3）　例えば

R.A.Toupin, Arch. Ratn'l Mech. Anal., 5 (1956), 849.

A.C.Eringen, Int. J.Engng Sci., 1 (1963), 127.

4）　例えば

池田　恵，　物性研究，14 (1970), 203.

池田　恵，　同　上，15 (1971), 217.

5）　K.Yano & E.T.Davies, Ann, di Mate., 37 (1954), 1.

池田　恵，　物性研究，12 (1969), 365.

6）　池田　恵，　物性研究，17 (1972), 383.

池田　恵，　力学研究所報告，1 (1971), 3.

7）　例えば

E.Cartan, Les Espaces de Finsler. Hermann, Paris, 1934.

H.Rund, The Differential Geometry of Finsler Spaces. Springer, 1959.

Y.Takano, Prog. Theor. Phys., 40 (1968), 1159.

8) M.Kawaguchi, RAAG Memoirs, 3 (1962), 718.
池田 恵、 17 (1971), 131.

9) 例えば
S.Amari, RAAG Memoirs, 3 (1962), 99.
K.Kondo, Ibid., 3 (1962), 109.